

جدول التكاملات الأساسية

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c : x \neq 0$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c : a > 0, a \neq 1$$

$$4. \int e^x dx = e^x + c$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$7. \int \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$9. \int \csc^2 x dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c, x \neq k\pi$$

$$11. \int \sec x \tan x dx = \sec x + c, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$12. \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c, x \neq \pi k$$

$$13. \int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$14. \int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$15. \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int (\tanh^2 x - 1) dx = -\tanh x + c : x \neq 0$$

$$16. \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \int (1 - \tanh^2 x) dx = \tanh x + c$$

$$17. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctgh} \frac{x}{a} + c = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + c$$

$$19. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c : a \neq 0$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{argsh} \frac{x}{a} + c$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c : |x| < |a|$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c : |x| > |a|$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{argch} \frac{x}{a} + c$$

$$24. \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

$$25. \int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

$$26. \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argth} x + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c$$

$$27. \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccotg} x + c$$

$$28. \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c : a \neq 0$$

$$29. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsh} x + c$$

$$30. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c : |x| < 1$$

$$31. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c : |x| > 1$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch} x + c : |x| > 1$$

طرق حساب التكاملات الأساسية

[X] المكاملة بالتعويض:

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(t) dt \Big|_{t=u(x)}$$

$$\bullet \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

٢. إذا كانت الدالة المستكملت لا تغير إشارتها إذا استبدلنا كل x بـ $-x$.

(زوجية بالمتغيرين معا)
($\sin x \rightarrow -\sin x$) وكل ($\cos x \rightarrow \cos x$) أي

نستخدم التبديل $t = \tan x$

$$B. \int \cos^m x \sin^n x dx$$

حيث m, n أعداد صحيحة غير سالبة فميز الحالات التالية:

١. العدد n فردي في هذه الحالة نضع $t = \cos x$

نستخدم العلاقة: $\sin^2 x = 1 - t^2$

٢. العدد m فردي في هذه الحالة نضع $t = \sin x$

نستخدم العلاقة: $\cos^2 x = 1 - t^2$

٣. إذا كان العددين m, n زوجيين في هذه الحالة نستخدم

مستطير ضعف الزاوية

$$\bullet \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\bullet \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

أو نستخدم التبديل $t = \tan x$

٤. إذا كان العددين m, n فرديين في هذه الحالة نصلح

جميع التبديلات السابقة

$$C. I_1 = \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

$$D. I_2 = \int \sin \alpha x \sin \beta x dx$$

$$E. I_3 = \int \sin \alpha x \cos \beta x dx$$

$$F. I_4 = \int \cos \alpha x \sin \beta x dx$$

في التكاملات (C, D, E) نستخدم مستطير التحويل من حواء إلى مجموع أي:

$$a. I_1 = \frac{1}{2} \int [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x] dx$$

$$= \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} + \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} + C$$

$$b. I_2 = \frac{1}{2} \int [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x] dx$$

$$= \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} + C$$

$$c. I_3 = \frac{1}{2} \int [\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x] dx$$

$$= -\left[\frac{\cos(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} + \frac{\cos(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} \right] + C$$

$$d. I_4 = \frac{1}{2} \int [\sin(\alpha + \beta)x - \sin(\alpha - \beta)x] dx$$

$$= -\frac{\cos(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} + \frac{\cos(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} + C$$

$$G. \int \tan^n x dx$$

$$H. \int c \tan^n x dx$$

• في التكامل (F) نستخدم التبديل $t = \tan x$

$$x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2 + 1} \quad \text{فيكون}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad \text{أو نستخدم العلاقة}$$

• في التكامل (G) نستخدم التبديل $t = c \tan x$

$$x = \arccot t \Rightarrow dx = \frac{-dt}{t^2 + 1} \quad \text{فيكون}$$

$$1 + c \tan^2 x = \csc^2 x \quad \text{أو نستخدم العلاقة}$$

$$I. I_n = \int \sec^n x dx$$

$$1. I_n = \int \csc^n x dx$$

• في التكامل (H) نكامل بالتجزئة فنضع :

$$dv = \sec^2 x dx = d(\tan x)$$

$$u = \sec^{n-2} x$$

$$I_n = \int \sec^{n-2} x d(\tan x) \\ = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x dx$$

بالمثلثة نتوصل إلى دستور لعلاقة تراجعية لحساب هذا النوع من التكاملات بدلالة تكاملات مماثلة برتبة أقل:

$$I_n = \frac{1}{n-1} [\sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}] + c$$

• إذا كان n زوجياً يمكننا اتباع مايلي:

$$I_n = \int \sec^n x dx = \int \sec^{2r} x dx \\ = \int (\sec^2 x)^{r-1} \sec^2 x dx \\ = \int (\tan^2 x + 1)^{r-1} d \tan x$$

وهذا تكامل لكثير حدود في $(\tan x)$

• في التكامل (I) نكامل بالتجزئة فنضع :

$$dv = -\csc^2 x dx = d(\cot x)$$

$$u = \sec^{n-2} x$$

$$I_n = \int \csc^{n-2} x d(\cot x)$$

$$= \csc^{n-2} x \cot x + (n-2) \int \csc^{n-2} x \cot^2 x dx$$

بالمثلثة نتوصل إلى دستور لعلاقة تراجعية لحساب هذا النوع من التكاملات بدلالة تكاملات مماثلة برتبة أقل:

$$I_n = \frac{1}{3-n} [\sec^{n-2} x \cot x - (n-2) I_{n-2}] + c$$

إذا كان n زوجياً يمكننا اتباع مايلي:

$$I_n = \int \csc^n x dx = \int \csc^{2r} x dx \\ = \int (\csc^2 x)^{r-1} \csc^2 x dx \\ = \int (\cot^2 x + 1)^{r-1} d \cot x$$

$$1. d(\sec^n x) = n \sec^n x \tan x dx$$

$$2. d(\csc^n x) = -n \csc^n x \cot x dx$$

$$3. \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$4. \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

• نكامل $\csc^n x$ هو نفس تكامل $\sec^n x$ مع إجراء تغير بالمتحول x أي:

$$\int \csc^n x dx = \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{d(x - \frac{\pi}{2})}{\cos^n(x - \frac{\pi}{2})} \\ = \int \frac{du}{\cos^n u} = \int \sec^n u du$$

$$1. I_n = \int \tan^n x \sec^m x dx$$

نميز ثلاث حالات:

1. n فردي نتبع مايلي:

$$\int \tan^{2r-1} x \sec^m x dx$$

$$= \int (\tan^2 x)^r \sec^{m-1} x \operatorname{tg} x dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^r \sec^{m-1} x d(\sec x)$$

٢. m زوجي نتبع ما يلي:

$$\int \tan^n x \sec^{2r} x dx =$$

$$\int \tan^n x (\sec^2 x)^{r-1} \sec^2 x dx =$$

$$\int \tan^n x (1 + \operatorname{tg}^2)^{r-1} d(\tan x) =$$

٣. n زوجي و m فردي نتبع ما يلي:

$$\int \tan^{2r} x \sec^m x dx =$$

$$\int (\sec^2 x - 1)^r \sec^m x d(x)$$

ومن ثم نستخدم المستور التدرجي (نكمل بالتجزئة).

كل ما ينطبق على الكوال المثبتة ينطبق على

الدوال المثبتة القطعية مع مراعاة القوانين التالية:

$$1. \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{ch} 2x)$$

$$2. \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1)$$

$$3. \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$4. \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$$

$$5. \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth}^2 x - 1$$

$$6. \operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}$$

$$7. \cos x = \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}$$

$$8. d(\operatorname{th} x) = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = (1 - \operatorname{th}^2 x) dx$$

$$9. d(\operatorname{cth} x) = \frac{-dx}{\operatorname{sh}^2 x} = (\operatorname{cth}^2 x - 1) dx$$

أما مستطير التحويل من جداء إلى مجموع في الدوال القطعية يتم استنتاجها من جمع و طرح العلاقات التالية:

$$1. \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$2. \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

أما مستطير التحويل من جداء إلى مجموع في الدوال المثلثية يتم استنتاجها من جمع و طرح العلاقات التالية:

$$1. \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$2. \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

والمستطير بعد الاستنتاج هي:

$$1. \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y)]$$

$$2. \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)]$$

$$3. \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y)]$$

$$4. \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)]$$

$$5. \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$6. \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$7. \sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

$$8. \cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

١٠
C

جدول الاشتقاق

مشتق

جدول الاشتقاق للتوابع الشهيرة

- 1) $y = a \Rightarrow y' = 0$
- 2) $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1} ; n \neq -1$
- 3) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- 4) $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a ; a > 0$
- 5) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$
- 6) $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$
- 7) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$
- 8) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$
- 9) $y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- 10) $y = \cot x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
- 11) $y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x$
- 12) $y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x$
- 13) $y = \tanh x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
- 14) $y = \coth x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sinh^2 x} = -1 - \coth^2 x$
- 15) $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 16) $y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 17) $y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$
- 18) $y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$
- 19) $y = \operatorname{arsinh} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- 20) $y = \operatorname{arcosh} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- 21) $y = \operatorname{argtanh} x \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2} ; |x| < 1$
- 22) $y = \operatorname{argcoth} x \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2} ; |x| > 1$

تغير المتحولات في التكاملات المضاعفة

① من ديكارتية إلى قطبية:

$$x = r \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \theta \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r, \theta) r dr d\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

② من ديكارتية إلى اسطوانية:

$$x = r \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \theta, \quad z = z$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r, \theta, z) r \cdot dr d\theta dz$$

③ من ديكارتية إلى كروية:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, \quad z = r \cdot \cos \varphi$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r, \theta, \varphi) r^2 \cdot \sin \varphi \cdot dr d\theta d\varphi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$